A KÉNYSZERMOZGÁS DINAMIKÁJÁNAK FŐISKOLAI DIDAKTIKÁJA A VIRTUÁLIS MUNKA ELVE NÉLKÜL*

DR. MÁTRAI TIBOR—PATKÓ GYÖRGY

Ebben a dolgozatban címének megfelelően egy kipróbált és bevált didaktikai módszert ismertetünk a pontdinamika általános elveinek induktív tárgyalására, amelyben szándékosan nem vesszük igénybe a Bernoulli—D'Alembert-féle elvet egyrészt amiatt a didaktikai nehézség miatt, hogy az ebben szereplő ún. virtuális elmozdulás a fizikában nem realizálható, matematikai fogalom csupán, másrészt azért a szépséghibájáért is, hogy ez az elv a szabad pontra már tanult Newton-féle mozgásegyenletet következményként szükségtelenül megismétli.

Ismeretes [1], hogy az m-tömegű tömegpontot támadó $\bar{F}$ ún. *szabad erőn* kívül, amely mindig csak a tömegpont $\bar{r}$ hely- és t idő-koordinátájától függhet, a pontra egy járulékos erő az F' ún. *kényszer-erő* is hathat, amely okvetlenül más változóktól is függ, ha a függés explicit alakját előre nem is ismerjük, csupán azt tudjuk róla, hogy járulékos hatására a tömegpont tér-idő-koordinátái mindig egy vagy több feltételi egyenletet, ún. *kényszeregyenletet* elégítenek ki, akármilyen szabad erőtér áll is fenn.

Régebben azt tartották, hogy kényszererők működése esetén a Newton-féle mozgás-egyenletek elégtelenek a mozgás meghatározására, azokat további dinamikai tapasztalatokkal kell kiegészíteni és ezeket a tapasztalatokat is tartalmazzák az e célból megfogalmazott ún. dinamikai elvek, amelyek matematikai alakban szabatosan megfogalmazott sarkigazságok. Segítségükkel tehát nemcsak a szabad, hanem a kötött, vagyis kényszererőknek alávetett pont, vagy pontrendszer pályáját is ki tudjuk számítani.

Mai elemzés szerint: noha a dinamika elveiből logikailag a Newton-féle mozgásegyenletek is következnek, mégsem tartalmaznak az elvek ezeknél több dinamikai tapasztalatot, hanem csupán a bonyolult kényszererőknek szolgáltatják burkolt (implicit) értelmezését.

* A dolgozat előadásként is elhangzott az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat 1966. évi (április 8.) országos fizikatanári ankétján.

Jelentőségük pedig abban is áll, hogy segítségükkel sikerült felkutatni a mozgásegyenleteknek azon invariáns formáit, amelyek függetlenek a hely-koordináta különleges választásától a számbajövő legáltalánosabb erőhatások, így kényszererők működése esetén is. A kvantummechanika arra tanít, hogy a dinamikai elvek csúcsán *Hamilton* elve áll, amelyet a legkisebb hatás elvének is neveznek.

A most következő interpretáció újszerű mivolta abban áll, hogy a virtuális munka elvét elkerülve, a kísérleti fizikus gondolkodásmódjához közelálló (induktív) módon a Newton-féle egyenletekből kiindulva apró lépésekben igyekszünk Hamilton elvéig eljutni.

Egyetlen egy pontra és egy kényszeregyenletre szorítkozva a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(\bar{r}, t) + \bar{F}', \qquad (1)$$

ahol $\bar{F}'$ az említett ismeretlen alakú kényszererő, amelynek hatására a tömegpont $\bar{r} = r\ (t)$ pályája az előre megadott

$$\varphi(\bar{r}, \dot{r}, t) = 0 \qquad (2)$$

kényszeregyenletet is kielégíti.

Ha ez a differenciál-egyenlet zárt alakban az $\bar{r}$ egyik komponensére sem oldható meg, akkor a „kényszert” *anholonomnak,* ellenkező esetben pl. akkor is, ha az egyenlet az $\dot{\bar{r}}$ sebességet változóként egyáltalán nem tartalmazza, *holonomnak* nevezzük. Akár holonom, akár anholonom a kényszer, aszerint, hogy egyenletében a t idő független változóként explicit előfordul-e vagy sem, beszélünk *reonom,* vagy *szkleronom* kényszerről.

A gömbi inga-mozgásnál állandó l fonálhossz esetén pl. a kényszeregyenlet:

$$\bar{r}^2 - l^2 = 0$$

alakú. Ezért azt a kényszert holonom-szkleronomnak kell minősítenünk.

Az $\bar{F}'$ kényszererő meghatározásának problémájára térve át először szorítkozzunk a legegyszerűbb holonom-szkleronom esetre, amelyben a *kényszeregyenlet:*

$$\varphi(\bar{r}) = 0. \qquad (3)$$

Ez egy nyugvó felület (pl. egy állandó sugarú nyugvó gömb) egyenlete, a pont ezen kénytelen mozogni. Időszerint deriválva (3)-at:

$$\dot{\bar{r}} \operatorname{grad} \varphi = 0. \qquad (4)$$

Minthogy nyugvó kényszer nem végezhet munkát (ellenkező esetben perpetuum mobilét szerkeszthetnénk!) ezért teljesítménye:

$$\overline{F}'\dot{\overline{r}} = 0. \tag{5}$$

A felületen tetszőleges értintőleges irányú (kezdő) sebességet megengedve azonban a (4) és (5) egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$\overline{F}' = \lambda \operatorname{grad} \varphi, \tag{6}$$

ahol λ egy skaláris függvény. Szavakban: *a kényszererő a nyugvó kényszerfelületre okvetlenül merőleges.* Ezt az összefüggést nincs okunk mozgó kényszernél sem tagadni, vagyis megváltoztatni, tehát reonom esetben is érvényesnek tartjuk, amikor is:

$$\varphi(\overline{r}, t) = 0. \tag{7}$$

A mozgásegyenlet tehát okvetlenül:

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F} + \lambda \operatorname{grad} \varphi \tag{8}$$

alakú (ez Lagrange I.-fajú egyenlete egy tömegpont esetén). Itt a λ meghatározására a (7) kényszeregyenletet használjuk fel, amivel egyben okvetlenül biztosítjuk ennek kielégülését is. E célból kétszer deriváljuk a (7) kényszeregyenletet az idő szerint:

$$\dot{\overline{r}} \operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{9a}$$

$$\ddot{\overline{r}} \operatorname{grad}\varphi + \dot{\overline{r}} \operatorname{grad}\left(\dot{\overline{r}} \operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{9b}$$

Ez m-mel szorozva és $m\ddot{\overline{r}}$ helyébe a (8) mozgásegyenlet jobb oldalát behelyettesítve lineáris egyenletet kapunk λ-ra, amelyből

$$\lambda = -\frac{\overline{F} \operatorname{grad}\varphi + m\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m\dot{\overline{r}} \operatorname{grad}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{\overline{r}} \operatorname{grad}\varphi\right)}{\operatorname{grad}^2\varphi}. \tag{10}$$

Látjuk, hogy λ az $\dot{\overline{r}}$-tól, sőt az $\overline{F}$ szabaderőtől is függ:

$$\lambda = \lambda(\overline{r}, t, \dot{\overline{r}}, \overline{F}).$$

Ezzel az első probléma elvileg megoldottnak tekinthető.

Most azonban térjünk vissza a derékszögű koordinátákkal is felírható:

$$\varphi\,(x, y, z, t) = 0 \tag{11}$$

(7) kényszeregyenletre, amelynek hátrányos tulajdonsága, hogy implicit. Kedvezőbb lenne ugyanis, ha ez x-re, y-ra, z-re megoldott alakú, vagyis explicit lenne. A kényszeregyenlet azonban az x, y, z három koordináta közül csak egynek, pl. z-nek a kiszámítását teszi lehetővé:

$$z = z\,(x, y, t), \tag{12}$$

ahol most x, y tetszőlegesen választható. Azt mondjuk, hogy az egy pontból álló dinamikai rendszer a kényszeregyenlet miatt most két szabadsági fokú. Ezért az x-et és az y-t valamely q_1 és q_2 paraméterek tetszőleges

$$x = x\,(q_1, q_2, t) \tag{13}$$

$$y = y\,(q_1, q_2, t)$$

függvényeként megadva, a (12) kényszeregyenlet a z-t valamilyen

$$z = z\,(q_1, q_2, t) \tag{14}$$

függvény alakjában szolgáltatja. Vektori jelekkel:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(q_1, q_2, t)\,. \tag{15}$$

Ez az explicit kényszerfeltétel egyenértékű az implicit (7)-tel. A benne szereplő két paramétert q_1 *és* q_2-t *általános koordinátáknak* nevezzük. Feltesszük, hogy a $\partial \bar{r}/\partial q_j$ ($j = 1{,}2$) létezik. Az a célunk, hogy (8) mozgásegyenletet az $\bar{r}$ változóról a q-ra transzformáljuk át. E célból szorozzuk azt $\partial \bar{r}/\partial q_j$-vel:

$$m\,\ddot{\bar{r}}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} = \bar{F}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} + \lambda\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,. \tag{16}$$

A jobb oldalon az

$$\bar{F}\,(\bar{r}, t)\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} = Q_j\,(q_1, q_2, t)$$

mennyiségét általános erőkomponenseknek nevezhetjük, ugyanis időtől független (szkleronom) kényszer esetében az általános koordináta-változással való kompozíciója:

$$\sum_j Q_j\,\delta q_j = \sum_j \bar{F}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\,\delta q_j = \bar{F} \sum_j \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\,\delta q_j = \bar{F}\,\delta \bar{r}$$

láthatóan éppen a szabad erő végzett munkáját szolgáltatja. A (16) jobb oldalának második tagja zérus. Ez a φ (r (q_1, q_2, t) t) = 0 kényszeregyenletnek q_j szerint való parciális deriválásából következik.

Tehát (16)-ból marad:

$$m\ddot{r}\frac{\partial r}{\partial q_j} = Q_j. \tag{17}$$

A bal oldal átalakítására induljunk ki a következő evidens azonosságból:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{18}$$

Itt azonban

$$\dot{r} = \sum_j \frac{\partial r}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r}{\partial t} \quad \text{miatt} \quad \partial\dot{r}/\partial\dot{q}_j = \partial r/\partial q_j. \tag{19}$$

Tehát a (17) azonosság jobb oldala így módosul:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\frac{\partial r}{\partial q_j}\right) = \ddot{r}\frac{\partial r}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right).$$

Az m-mel szorozva és a jobb oldal I. tagját a (17) mozgás-egyenlet bal oldalára téve:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1{,}2),$$

ahol a K kinetikai energiát a (19) egyenlet alapján még q_i függvényként kell kifejeznünk:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \sum_j\sum_k a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j b_j\dot{q}_j + c,$$

itt az a_{jk} (q_1, q_2) = a_{kj} és időtől független (szkleronom) kényszerfeltétel esetén a $b_j = 0$ *és* $c = 0$ ($j = 1{,}2$).

A kapott $j = 1{,}2$ mozgásegyenleteket *Lagrange-féle I.. fajúaknak* nevezzük. Egyszerűbb alakban is írhatók, ha az $\bar{F}$ szabad erőtér egy potenciálfüggvényből vezethető le, vagyis

$$\bar{F} = -\operatorname{grad} U(\bar{r}, t). \tag{21}$$

Ekkor:

$$Q_j = \bar{F}\frac{\partial r}{\partial q_j} = -\operatorname{grad} U[r(q_1, q_2, t), t]\cdot\frac{\partial r}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Tehát a (20) II. fajú mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{22}$$

Ez az egyenlet az U-nak $\dot{q}_j$-tól való függetlensége miatt az

$$L = K - U = L\,(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \tag{23}$$

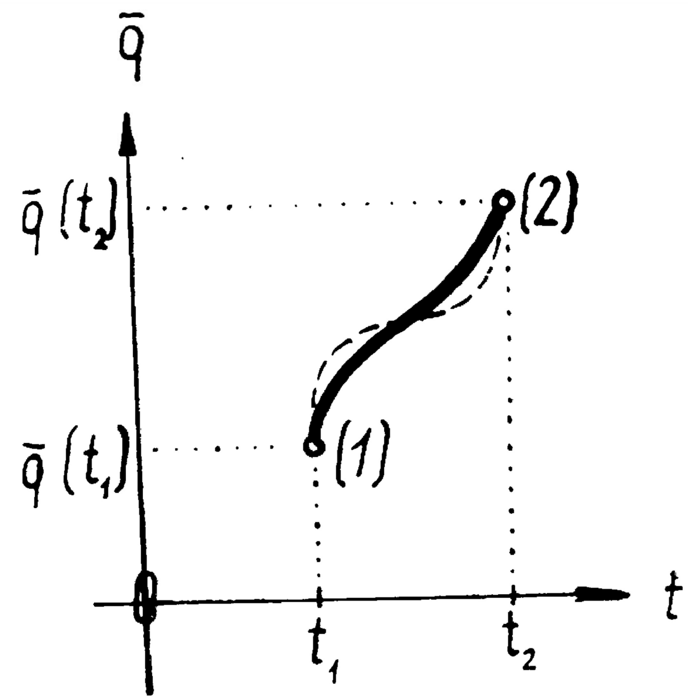
ún. *Lagrange-féle függvény* bevezetése árán egyszerűbben így is írható:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1{,}2). \tag{24}$$

Az egyenlet azonban nemcsak egy holonom kényszeregyenletnek alávetett egyetlen tömegpontnak adja meg a mozgását általános koordinátákban, hanem tetszőleges N számú oly pontét is, amelynek helyvektorát az

$$\bar{r}_P = \bar{r}_P(q_1, \ldots, q_s, t) \quad (P = A, B, \ldots, N),$$

vektoregyenlet szolgáltatja a $q_1, q_2, \ldots q_s$ általános koordináták és az idő függvényeként. A levezetés ugyanis erre az általánosabb esetre ugyan több írásmunkával, de szinte szóról-szóra megismételhető (itt a kényszeregyenletek $\varkappa$ számát érthető okokból $\varkappa = 3\,N - s$ adja meg). L. függelékben.



1. sz. ábra

Most már csak egy lépés választ el *Hamilton* elvétől. Jelöljük a továbbiakban a $q_1, q_2, \dots q_s$ általános koordináták összességét egyszerűen q-val.

Miközben a pontrendszer mozog, az $L(q, \dot{q}, t)$ Lagrange-függvénye időben változik, nemcsak azért, mert ez t-től is explicit függhet, hanem azért is, mert a q és $\dot{q}$ is függ t-től. Ezért értelme van a $t_1 < t_2$ időpont között az

$$L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad (25)$$

idő-integrálról beszélni.

Vizsgáljuk (l. az ábrát!) a valóságos pálya környezetében az S „hatás-integrál" érték-változását, miközben a valóságos $q = q(t)$ pályát (folytonos vonal) a rögzített (1) kezdő és (2) végpontja között gondolatban egy igen közeli szomszédos pályára (szaggatott vonal) tereljük.

Ezt a pályamegváltoztatást analitikailag úgy állítjuk elő, hogy az S integrálban q helyett

$$q(t) + \varepsilon \eta(t), \qquad (26)$$

vagyis megváltoztatott értéket írunk, ahol $\varepsilon > 0$ (infinitezimális) tetszőleges állandó, $\eta(t)$ pedig egyszer differenciálható, tetszőleges függvény, amely a határokon eltűnik, vagyis

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0. \qquad (27)$$

Ekkor természetesen $\dot{q}(t)$ helyébe

$$\dot{q} + \varepsilon \dot{\eta}$$

kifejezést kell írni. Az S keresett értékváltozásának tanulmányozására az S-t az ε függvényének fogjuk fel ($S = S(\varepsilon)$ és képezzük a $(dS/d\varepsilon)_{\varepsilon \to 0}$ differenciálhányadost. E célból fejtsük hatványsorba. ε szerint az integrandust $L(\varepsilon)$-t az $\varepsilon = 0$ körül

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(0) + \left(\frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) \varepsilon + (\dots)\varepsilon^2 + \dots \right].$$

(Itt

$$\frac{\partial L}{\partial q} \eta\text{-n a } \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j$$

rövidítést kell érteni.) Differenciáljunk [2] az $\varepsilon = 0$ helyen:

$$\left(\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon\to 0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\eta\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\, dt. \qquad (28)$$

Itt a jobb oldali második tagot parciális integrálással átalakítva:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\, dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta\right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta\, dt.$$

A jobb oldal első tagja (26) miatt eltűnik, a II. tagja pedig (28) jobb oldalának I. tagjával így egyesíthető:

$$\left(\frac{dS}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon\to 0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta\, dt.$$

Itt azonban az integranduszban a Lagrange-féle II. fajú egyenlet fennállása miatt a zárójelbe tett szorzó mindig zérus, tehát egyszersmind

$$\left(\frac{dS}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon\to 0} = 0. \qquad (29)$$

Ezt rövidebben úgy is szokás írni, hogy az S első variációja

$$\left[\delta S = \varepsilon\left(\frac{dS}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon\to 0}\right]:$$

$$\delta S = 0. \qquad (30)$$

Szavakban: a t_1 és t_2 időpontok között a valóban előálló pályára vonatkozóan a Lagrange-féle függvény időintegrálja mindig extrémum (ill. stacionárius) olyan szomszédos pályákkal összehasonlítva, amelyek a kényszeregyenleteket szintén kielégítik és végpontjaik a valóságoséival azonosak. Ez *Hamilton elve,* amelynek értéke egyrészt abban áll, hogy a tétel meg is fordítható. Vagyis ha (30) fennáll, akkor a (23) II.-fajú egyenletek és vele a dinamika törvényei következnek (ez az η függvény tetszőleges választhatóságából folyik a variációszámítás alaplemmája [3] értelmében). A Hamilton-féle elv másik előnye az a tény, hogy az független a koordinátaválasztástól, hiszen megfogalmazásában nem is szerepelnek koordináták. A harmadik értékét a modern fizika ismerte fel és igazolta: segítségével tudjuk ugyanis szabatosan és általánosan értelmezni a kvantumfizika csererelációiban annyira fontos *kanonikusan konjugált változó-párokat* [4].

Joggal mondhatjuk, hogy a Hamilton-féle elv a kvantumfizika kapuja.

A vázolt didaktikai javaslatunk a tapasztalataink szerint nem terheli meg a főiskolai oktatót felesleges emlékezeti munkával, ezért tanítása nem igényel zavaró jegyzetbetekintést, még kevésbé lélektelen felolvasást.

IRODALOM

[1] *Budó Á.:* Mechanika, III. kiadás, 125. oldal TKK. Bp. 1964.

[2] *Rothe R.:* Matematika gépészmérnökök számára, 462. old. MKK. Bp. 1960.

[3] *Grüss N.:* Variationsrechnung, S. 12. Hirzel, Leipzig. 1923.

[4] *Marx Gy.:* Kvantummechanika, I. kiadás, 259. old. MKK. Bp. 1957.

FÜGGELÉK

Tárgyalásunkat N-számú $(P = A, B, \dots, N.)$ tömegpontra és $\varkappa$ számú holonom-reonom kényszerfeltételre a következő módon terjesztjük ki. A (7) helyébe lépő

$$\varphi_v(\bar{r}_A, \bar{r}_B, \dots, \bar{r}_N, t) \quad (v = \alpha, \beta, \dots, \varkappa.) \tag{31}$$

$\varkappa$-számú kényszerfeltételnek megfelelően minden egyes P-pontra $\varkappa$-számú kényszererő $(\bar{F}'_{Pv})$ fog hatni egymástól függetlenül. Minthogy (6)-nak megfelelően itt is fennáll:

$$\bar{F}'_{Pv} = \lambda_v \operatorname{grad}_P \varphi_v, \tag{32a}$$

és

$$\bar{F}'_P = \sum_v \lambda_v \operatorname{grad}_P \varphi_v, \tag{32b}$$

(jelölésmagyarázat*)
ezért a Lagrange-féle I.-fajú egyenlet a P-edik pontra most szükségképpen így általánosodik:

$$m_P \ddot{\bar{r}}_P = \bar{F}_P + \sum_v \lambda_v \operatorname{grad}_P \varphi_v. \tag{33}$$

A λ_v meghatározására a (31) egyenletet itt is t szerint teljesen deriváljuk:

$$\sum_P \dot{\bar{r}}_P \operatorname{grad}_P \varphi_v + \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} = 0, \tag{34}$$

majd ezt a χ-számú egyenletet a t-szerint másodszor is teljesen deriválva a fellépő $\ddot{\bar{r}}_P$ helyébe a (33) egyenletből kifejezett $\ddot{\bar{r}}_P$-t helyettesítjük.

* A grad_p operator az $\bar{r}_p$-nek megfelelő derékszögű komponense szerinti parciális deriválást jelöli ki.

Ekkor éppen $\varkappa$-számú lineáris egyenletet kapunk a keresett $\varkappa$-számú λ_v kiszámítására.

Térjünk most át (15) általánosításaként implicit-holonom kényszerfeltételre:

$$\bar{r}_P = \bar{r}_P(q_1, q_2, \ldots, q_j \ldots, q_s, t). \tag{35}$$

Ennek ismeretében a (33) I. fajú egyenletet a q-változókra transzformálhatjuk át, hogy megszorozzuk $\partial \bar{r}_P / \partial q_j$-vel:

$$m_P \ddot{\bar{r}}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_j} = \bar{F}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_j} + \sum_v \lambda_v \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_j} \operatorname{grad}_P \varphi_v. \tag{36}$$

Itt a jobb oldal második tagja eltűnik, mert a Σ-jel alatt éppen a (35)-nek q_j-szerinti parciális deriválásával kapott

$$\frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_j} \operatorname{grad}_P \varphi_v = 0 \tag{37}$$

szerepel. Az első tagot itt is a P-re ható erő j-edik komponensének minősíthetjük

$$Q_{Pj} = \bar{F}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial q_j}, \tag{38}$$

amely valamennyi P-re összegezve a q_j $(j = 1, 2, \ldots, s.)$ koordinátájú pontrendszerre ható általános erőnek j-komponensét szolgáltatja:

$$Q_j = \sum_P Q_{Pj}. \tag{39}$$

Ha (36) egyenletet P szerint összegezzük $(P = A, B, \ldots, N.)$, akkor a jobboldalon éppen (39) jelenik meg, a bal oldali összeget itt is a (18) azonossággal alakítjuk át, mikor is a

$$K = \frac{1}{2} \sum_P m_P \dot{\bar{r}}_P^2$$

teljes kinetikai energia segítségével éppen a keresett (20)-hoz, vagyis a pontrendszerre vonatkozó Lagrange-féle II. fajú egyenlethez jutunk, csakhogy most $j = 1, 2, \ldots, s$.